

Preuve de "si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est additive et continue alors F est linéaire"

1 Linéarité

Une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire si pour tous λ et x réels, elle vérifie l'égalité $F(\lambda x) = \lambda F(x)$, ce qui est équivalent à $F(\lambda x) = xF(\lambda)$.

Cette définition entraîne que la fonction est de la forme $F(x) = ax$ (a réel). En effet, pour $\lambda = 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = F(1x) = xF(1) = ax$$

en posant $a = F(1)$.

2 Propriété de linéarité lorsque λ est un nombre naturel

Pour $\lambda = 0$, montrons que $F(0x) = 0F(x)$.

$$F(0x) = F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0) \text{ (additivité),}$$

d'où, en soustrayant $F(0)$ dans chaque membre de $F(0) = F(0) + F(0)$,

$$0 = F(0) = F(0x),$$

d'où

$$F(0x) = 0F(x).$$

Pour $\lambda = 1$, montrons que $F(1x) = 1F(x)$.

$$F(1x) = F(x) = 1F(x).$$

Montrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_n : F(nx) = nF(x).$$

Initialisation : \mathcal{P}_0 est vraie.

Hypothèse de récurrence : supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons \mathcal{P}_{n+1} .

$$\begin{aligned} F[(n+1)x] &= F(nx + x) \\ &= F(nx) + F(x) \text{ (additivité)} \\ &= nF(x) + F(x) \text{ (hérédité)} \\ &= (n+1)F(x). \end{aligned}$$

Donc \mathcal{P}_n est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

3 Propriété de linéarité lorsque λ est un nombre entier

Montrons que $F(-x) = -F(x)$ pour tout x réel.

$$0 = F(0) = F[x + (-x)] = F(x) + F(-x)$$

d'où $F(-x) = -F(x)$.

D'où, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $F(-nx) = -F(nx) = -nF(x)$, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$F(nx) = n(Fx).$$

4 Propriété de linéarité lorsque λ est un nombre rationnel

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Montrons que $F(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}F(x)$.

$$\begin{aligned} F(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}F(x) &\Leftrightarrow nF(\frac{1}{n}x) = F(x) \\ &\Leftrightarrow F(n\frac{1}{n}x) = F(x) \\ &\Leftrightarrow F(x) = F(x). \end{aligned}$$

D'où quels que soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$F(\frac{m}{n}x) = mF(\frac{1}{n}x) = m\frac{1}{n}F(x) = \frac{m}{n}F(x),$$

c'est-à-dire quel que soit $q \in \mathbb{Q}$,

$$F(qx) = qF(x).$$

5 Propriété de linéarité lorsque λ est un nombre réel

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels (i.e., $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$) qui converge vers λ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \lambda$.

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= F\left[\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n\right)x\right] \\ &= F\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n x)\right] \text{ (linéarité de la limite)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F(q_n x) \text{ (continuité de } F) \\ &= F(x) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n\right) \\ &= \lambda F(x). \end{aligned}$$

Donc F est linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .